

5.5. Prostije jednačine matematičke fizike

U matematičkoj fizici najčešće se sretaju PDJ drugog reda, kao na primjer: jednačina treperenja (oscilacije) žice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

jednačina provođenje toplote:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

i Laplasova jednačina (stacionarno provođenje toplote):

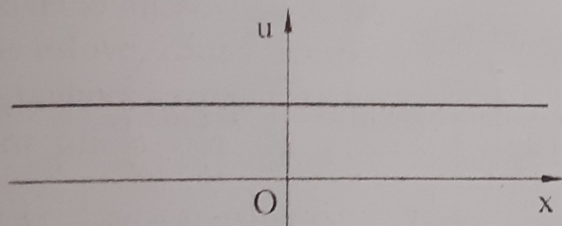
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

U prve dvije jednačine nepoznata funkcija je $u = u(x, t)$ (t -vrijeme) i $a \in \mathbb{R}$, a u trećoj jednačini $u = u(x, y, z)$.

Razmotrimo neke slučajeve navedenih jednačina.

a) Treperenje neograničene žice

Ako se neograničena žica izvede iz stanja mirovanja ona počinje da treperi (sl 1).



sl 1

Matematički model tih treperenja je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad (2)$$

gdje su φ i ψ dovoljno glatke (diferencijabilne) funkcije.

Treba da nađemo rješenje Kz (1)-(2).

Jednačina (1) je hiperboličkog tipa, jer je $\Delta = a^2 > 0$. Nađimo kanonski oblik jednačine

(1). Jednačina karakteristika je $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$. Dalje je $x + at = C_1$ i $x - at = C_2$.

Uvedimo smjene $\xi = x + at$ i $\eta = x - at$. Tada je